

中国科学技术大学

原子物理小论文



从量子隧穿效应到超导量子计算

作者姓名： 廖荣, 刘白羽

学科专业： 量子信息物理学

导师姓名： 陈向军教授

完成时间： 二〇二三年四月十五日

摘 要

由于量子计算机在特定问题上的求解速度远超经典计算机，且经典计算机的芯片加工尺度接近原子尺寸，摩尔定律逐渐失效，人们开始将目光转向量子计算。基于超导电路的量子计算易于控制和扩展，且便于结合成熟的半导体工艺进行微纳加工，因此近年来相较于光学、离子阱等其他体系，得到了更加快速和广泛的发展，且成功实现量子计算优越性验证。

本文以原子物理和量子力学的学科知识为基础，从原子物理课程中的量子隧穿原理出发，推导得出约瑟夫森关系，并进一步引申到前沿的超导量子计算中。本文调研了近年来 Transmon 和 Fluxonium 等超导量子比特的设计思路，并根据其哈密顿量计算能级差分析非谐性和引入的其他噪声影响等，最后介绍了一些超导量子比特的微纳加工工艺，也即作者在课题组中的学习和工作内容。

本文的第一章主要介绍量子计算的概念和发展过程，第二章从量子隧穿效应出发，主要介绍超导量子比特的原理，即约瑟夫森关系和 LC 振荡电路的量子化，第三章主要介绍超导量子比特的多种设计方式，并从哈密顿量出发，计算数据分析得出各自的优劣，第四章简要介绍了超导量子比特的制备工艺流程。

关键词：量子隧穿；超导；量子计算；量子比特；

目 录

第 1 章 背景信息与发展情况	5
1.1 量子计算的背景	5
1.1.1 早期发展：复杂性理论和量子算法	5
1.1.2 当代发展：Supremacy and NISQ	5
1.1.3 未来发展：实现专用量子模拟机 → 容错量子计算	6
第 2 章 量子比特的原理	7
2.1 约瑟夫森关系	7
2.1.1 非超导态电子的量子隧穿效应	7
2.1.2 超导态电子的量子隧穿效应（约瑟夫森效应）	9
2.2 超导量子比特的原理	13
2.2.1 LC 振荡电路基础	13
2.2.2 量子化的 LC 振荡电路	14
2.2.3 约瑟夫森结的引入	15
2.2.4 直流超导量子干涉仪（dc-squid）的引入	19
第 3 章 量子比特的设计	20
3.1 主流方案——Transmon 量子比特	20
3.1.1 电荷噪声的影响和抑制方法	20
3.1.2 磁通噪声的影响和抑制方法	21
3.2 小众方案——Fluxonium 量子比特	23
第 4 章 量子比特的微纳加工	24
4.1 设计思路	24
4.2 量子芯片加工工艺	25
4.2.1 镀膜技术	25
4.2.2 约瑟夫森结的制备	25
参考文献	27
附录 A 附录	29
A.1 一维量子谐振子的能级和势能图片源码	29
A.2 CPB 的能级和势能图片源码	31
A.3 Transmon 的电荷噪声抑制图片源码	32
致谢	34

符号说明

- J, J_x 一维概率流密度
 J_e 一维电流密度, 值为 eNJ_x
 J_c 约瑟夫森结临界电流密度
 ϕ 库珀对相位 (2.1节), 库珀对相位差 (2.2节及以后)
 Φ_0 磁通量子, 值为 $\frac{h}{2e}$
 E_C 一个电子在电容器上所产生的能量, 值为 $\frac{e^2}{2C}$
 E_L 一个磁通量子在电感上所产生的能量, 值为 $\frac{\hbar^2}{4e^2L}$
 I_c 约瑟夫森结临界电流
 L_J 约瑟夫森结的电感
 E_J 约瑟夫森结所存储的势能, 值为 $\frac{\Phi_0 I_c}{2\pi}$
 ω 振荡频率
 $\omega^{n \rightarrow m}$ $|n\rangle \rightarrow |m\rangle$ 的振荡频率差
 Φ_{ext} 外部磁场的磁通量
 ξ 重整化的 x , 值为 $\frac{C\omega}{\hbar}x$
 $H_n(x)$ 厄密多项式, 部分值可参见 A.2
 λ E_C 与 E_J 的比值, $\lambda = \frac{E_C}{E_J}$

第 1 章 背景信息与发展情况

1.1 量子计算的背景

1.1.1 早期发展：复杂性理论和量子算法

- Paul Benioff & Feynman: 提出量子计算概念 (1980-1981)^[1-2]
- David Deutsch: 提出量子图灵机模型 (1985)^[3]
- Andrew Yao: 证明量子图灵机与量子线路模型等价 (1993)^[4]
- Peter Shor: 提出指数级加速大数分解的量子算法 (1994)^[5]
- Lov Grover: 提出平方倍加速的量子搜索算法 (1996)^[6]

在上世纪 80 年代到本世纪初，量子计算的发展基本为复杂度理论和算法的研究，主要在理论层面证明基于量子力学原理可以构建计算机，并在特定问题上展现出超越经典计算机的能力。但硬件实现方面发展较为缓慢。

1.1.2 当代发展：Supremacy and NISQ

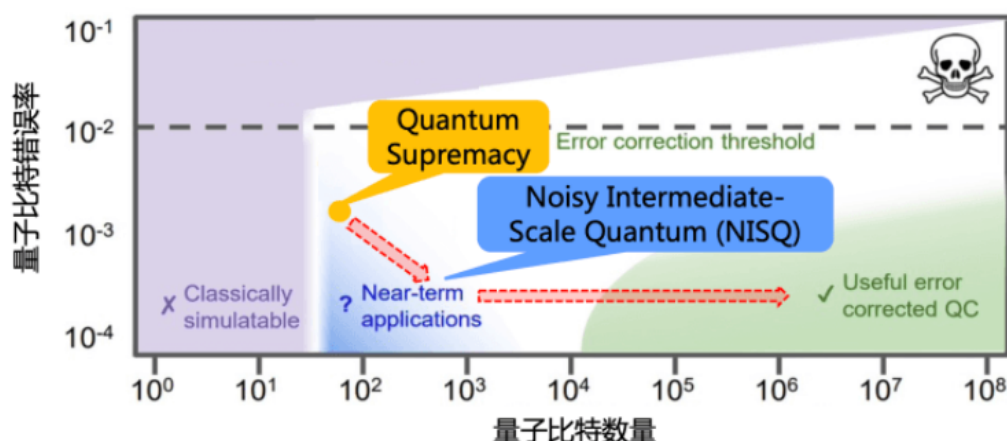


图 1.1 量子计算发展阶段

[7]

随着超导（Zuchongzhi^[8-10] & Sycamore^[11]^①）和光量子（Jiuzhang^[13-14]）两种体系量子计算优越性的物理实现，量子计算进入 NISQ 阶段，特点是^[15]

- 量子比特数目在 50 到几百
- 噪声的影响仍然很大
- 量子纠错困难且成本大
- 重点在于发展门容错率更高的量子器件

^①中国科学院理论物理研究所研究员张潘和博士生潘峰、周鹏飞、李素洁提出了一种新的张量网络缩并方法，利用矩阵乘积态表述张量网络缩并中所产生的中间张量并用密度矩阵重整化群进行有效的近似，压缩中间张量的维度，进而可以对任意张量网络进行缩并。这一算法本质上打破了 Sycamore 的优越性。^[12]

此阶段的主要工作是寻找近期应用，由于这个阶段的量子计算系统具有超越经典计算机的计算能力，但噪声使得量子线路的深度较低，否则保真度不够，计算结果不可信。因此这阶段需要开发使用的量子算法，在含噪声中等规模的量子计算硬件上得以使用，如变分量子算法、量子开源软件和张量网络模型等。

对于物理学术界，该阶段主要利用现有的量子计算平台开展量子模拟的研究，特别是低温物理学和多体物理学的动力学演化过程模拟，比如由于超导量子计算系统的哈密顿量与 Bose-Hubbard 模型类似，故可在超导量子计算系统中进行该模型的模拟，探究其中量子随机行走的动力学过程^[16]，以及激发传递和局域化现象^[17]。这正是中国科大祖冲之超导量子计算机完成的量子模拟工作。

量子模拟短期内另一个应用方向是利用超导量子计算系统开展化学动力学研究^[18]。在通用算法方面，可以开发相位估计 (Quantum Phase Estimation) 和变分量子特征解 (Variational Quantum Eigensolver)，相位估计是一个算法框架，之前提到的 Shor 算法也可以被认为是酉算符的特定构造的相位估计形式，但使用相位估计来解决哈密顿量的本征谱问题才是更为重要的应用。在针对化学领域应用方面，耦合簇理论 (Coupled Cluster Theory) 根据 Baker-Campbell-Hausdorff 公式进行级数计算的误差问题可以在量子计算中优化、使用量子蒙特卡罗方法 (Quantum Monte Carlo) 可以避免经典蒙特卡罗方法中使用 Metropolis 算法从试验波函数范数中生成随机位置向量的伪随机问题。使用量子变分算法实现时间演化计算也是动态化学动力学计算的重要方法之一。

1.1.3 未来发展：实现专用量子模拟机 → 容错量子计算

量子计算的第二个里程碑式实现专用量子模拟机，学术界预计仍然需要 10 年左右的时间，虽然按照 IBM 的超导量子计算路线图计划，其公司在未来五年即能大幅扩展量子比特数目，但近期发布的量子处理器均未公布门运算保真度、相干时间等重要指标，因此真实性能能否满足量子计算基本容错要求不得而知。

在实现专用量子模拟机后，就要发展大规模可扩展的容错量子计算，这是量子计算的第三个里程碑，超导量子比特不仅拥有优良的可扩展性，且基于超导体系的量子纠错也在近期出现新突破，2023 年 3 月 23 日 Nature 刊登南方科技大学量子科学与工程研究院俞大鹏院士团队在基于超导量子线路系统，通过实时重复的量子纠错技术延长了量子信息的存储时间，在国际上首次超越盈亏平衡点，展示了量子纠错优势^[19]，中国科学技术大学邹长铃教授也是作者之一。

第2章 量子比特的原理

2.1 约瑟夫森关系

超导量子比特的基本原理为利用约瑟夫森结在低温下的超导特性，实现非线性电感，并进一步得到临界电流可变的非线性电感，从而构建出宏观量子实现量子计算。故讨论超导量子比特原理必定离不开约瑟夫森关系。

超导电性是指超导材料在一定的低温下展现出的完全抗磁性和零电阻的现象。BCS理论指出，当温度降低到临界温度以下时，金属中自旋和动量相反的电子就会配对形成库伯对，库伯对在晶格中无损耗地运动，形成超导电流，也即库伯对的量子隧穿效应。这一效应由约瑟夫森在1962年首次理论预言^[20]，并于1963年被P.W.Anderson和J.M.Rowell在实验上证实^[21]。约瑟夫森本人也因此获得1973年的诺贝尔物理学奖。

2.1.1 非超导态电子的量子隧穿效应

首先从课本遗留的一个问题出发，对于一维方势垒问题，课本直接给出了透射系数 P 的关系式为

$$P \approx \frac{16E(V_0 - E)}{V_0^2} e^{-\frac{2a}{\hbar} \sqrt{2m(V_0 - E)}} \quad (2.1)$$

下面我们用数理方程的方法对这一结果进行验证。^①

因为势能函数是一个分段函数，所以分三个区域求解，再把解拼接起来从Schrödinger方程出发，三段解分别满足如下方程

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} \psi_I(x) + \frac{2mE}{\hbar^2} \psi_I(x) &= 0 \\ \frac{d^2}{dx^2} \psi_{II}(x) + \frac{2m(E - V_0)}{\hbar^2} \psi_{II}(x) &= 0 \\ \frac{d^2}{dx^2} \psi_{III}(x) + \frac{2mE}{\hbar^2} \psi_{III}(x) &= 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

对第一段区域，令 $\frac{2mE}{\hbar^2} = k_1^2$ ，带入直接得到解的形式为

$$\psi_I(x) = A_1 e^{ik_1 x} + A'_1 e^{-ik_1 x} \quad (2.3)$$

习惯上取入射流振幅系数为1，即

$$\psi_I(x) = e^{ik_1 x} + A'_1 e^{-ik_1 x} \quad (2.4)$$

^①此部分内容作者已发布在自己原创的知乎文章《USTC PHYSI 陈童量子力学精讲-习题解（第四章）（4.1-4.3）》中，作者南七小土狗即为作者廖荣，如有查重发现还请忽略。

对第二段区域, 令 $\frac{2m(E-V_0)}{\hbar^2} = -\kappa_2^2$, 代入直接得到解的形式为

$$\psi_{II}(x) = B_2 e^{-\kappa_2 x} + B'_2 e^{\kappa_2 x} \quad (2.5)$$

用双曲正弦函数改写为

$$\psi_{II}(x) = F \sinh \kappa_2 x + G \cosh \kappa_2 x \quad (2.6)$$

对第三段区域, 大体和第一段区域一致, 但认为此时只有右行的透射波, 故解的形式简写为

$$\psi_{III}(x) = C_3 e^{ik_1 x} \quad (2.7)$$

到此, 分段波函数写为

$$\psi(x) = \begin{cases} \psi_I(x) = e^{ik_1 x} + A'_1 e^{-ik_1 x} \\ \psi_{II}(x) = F \sinh \kappa_2 x + G \cosh \kappa_2 x \\ \psi_{III}(x) = C_3 e^{ik_1 x} \end{cases} \quad (2.8)$$

接下来使用波函数及其一阶导数的连续性质求解其中系数, 在 $x = 0$ 和 $x = a$ 两处分别使用, 得到

$$\begin{cases} F = 1 + A'_1 \\ G = \frac{ik_1}{\kappa_2} (1 - A'_1) \\ (1 + A'_1) \cosh \kappa_2 a + \frac{ik_1}{\kappa_2} (1 - A'_1) \sinh \kappa_2 a = C_3 \\ \frac{\kappa_2}{ik_1} (1 + A'_1) \sinh \kappa_2 a + (1 - A'_1) \cosh \kappa_2 a = C_3 \end{cases} \quad (2.9)$$

联立解得

$$A'_1 = \frac{(k_1^2 + \kappa_2^2) \sinh \kappa_2 a}{(k_1^2 - \kappa_2^2) \sinh \kappa_2 a + 2ik_1 \kappa_2 \cosh \kappa_2 a} \quad (2.10)$$

$$C_3 = \frac{2ik_1 \kappa_2 e^{-ik_1 a}}{(k_1^2 - \kappa_2^2) \sinh \kappa_2 a + 2ik_1 \kappa_2 \cosh \kappa_2 a} \quad (2.11)$$

反射概率和透射概率为

$$R = |A'_1|^2 = \frac{(k_1^2 + \kappa_2^2)^2 \sinh^2 \kappa_2 a}{(k_1^2 + \kappa_2^2)^2 \sinh^2 \kappa_2 a + 4k_1^2 \kappa_2^2} \quad (2.12)$$

$$T = |C_3|^2 = \frac{4k_1^2 \kappa_2^2}{(k_1^2 + \kappa_2^2)^2 \sinh^2 \kappa_2 a + 4k_1^2 \kappa_2^2} \quad (2.13)$$

在 $\hbar \rightarrow 0$ 的半经典近似下

$$T \approx \frac{16E(V_0 - E)}{V_0^2} e^{-\frac{2a}{\hbar} \sqrt{2m(V_0 - E)}} \quad (2.14)$$

2.1.2 超导态电子的量子隧穿效应（约瑟夫森效应）

约瑟夫森效应是超导态电子的量子隧穿效应，假设我们取两块超导体，中间使用一个绝缘体将超导体隔开，绝缘层的厚度大概为 1nm 量级，这样就构成了一个约瑟夫森结。在此将两侧的超导体标记为 1 和 2，实际上超导体的长度是有限的，但在此讨论中，将两个超导体看成一维无限延伸进行简化。

在具体地推导约瑟夫森关系之前，还需要先介绍超导态电子的概率流密度和超导体的磁通量子化。

1. 一维概率流密度

当局域概率守恒时，存在概率流密度 $J(x, t)$ ，使得下式成立

$$\partial_t \rho + \partial_x J = 0 \quad (2.15)$$

概率流密度 $J(x, t)$ 表征单位时间延 x 轴流过 x 点的概率，可由以下方法求出

将式 2.15 写成以下形式

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t) &= \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right] \Psi(x, t) \\ -i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi^*(x, t) &= \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right] \Psi^*(x, t) \end{aligned} \quad (2.16)$$

然后将两个方程分别与 Ψ ， Ψ^* 相乘，再上式减去下式，则有

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} (\Psi^* \Psi) &= \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \right) \left[\Psi^* \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi - \Psi \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi^* \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left[-\frac{\hbar^2}{2m} (\Psi^* \partial_x \Psi - \Psi \partial_x \Psi^*) \right] \end{aligned} \quad (2.17)$$

将式 2.17 与式 2.15 对比，可发现只要取

$$\begin{aligned} J(x, t) &= -\frac{i\hbar}{2m} (\Psi^* \partial_x \Psi - \Psi \partial_x \Psi^*) \\ &= \frac{1}{2m} (\Psi^* \hat{p} \Psi - \Psi \hat{p} \Psi^*) \end{aligned} \quad (2.18)$$

则可满足式 2.15，即该式为所求 $J(x, t)$ 。

2. 超导体的磁通量子化

在引入磁场后，带电粒子的哈密顿量变为

$$H = \frac{(\mathbf{P} - e\mathbf{A})^2}{2m} + V(\mathbf{X}) \quad (2.19)$$

其中 \mathbf{A} 为磁矢势。

薛定谔波动方程变为

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\mathbf{x}, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\nabla - \frac{ie}{\hbar} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \right)^2 + V(\mathbf{x}) \right] \Psi(\mathbf{x}, t) \quad (2.20)$$

仿照 1 中的方法，可以写出磁场中带电粒子的概率流密度为

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}, t) = -\frac{i\hbar}{2m}(\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*) - \frac{e\mathbf{A}\rho}{m} \quad (2.21)$$

如果将波函数写成 $\Psi(\mathbf{x}, t) = \sqrt{\rho}e^{i\theta(\mathbf{x}, t)}$ 的形式，则可将概率流密度重写为

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}, t) = (h\nabla\theta - e\mathbf{A})\frac{\rho}{m} \quad (2.22)$$

下面证明超导体内部无电流。

由式 2.15，超导材料稳恒时有 $\partial_t \rho = 0$ ，则 $\nabla \mathbf{J} = 0$ ，即超导电流为稳恒电流。

将 $\Psi(\mathbf{x}, t) = \sqrt{\rho}e^{i\theta(\mathbf{x}, t)}$ 代入薛定谔波动方程，并将 2.22 代入，可得

$$-\hbar \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{m}{2\rho^2} \mathbf{J}^2 + V(\mathbf{x}) \quad (2.23)$$

此方程在本节中等同于库珀对的薛定谔方程，非常重要，会多次用到。

稳恒状态时等式右边与时间无关，可写为 $-\hbar \frac{\partial \theta}{\partial t} = \epsilon(\mathbf{x})$ ，此时 $\epsilon(\mathbf{x})$ 可看作 \mathbf{x} 点处库珀对的能量，低温时库珀对处于最低能级，则要求 $\mathbf{J} = 0$ ，结合 $\nabla \mathbf{J} = 0$ 可知 \mathbf{J} 处处为零，而电流密度 $\mathbf{J}_e = eN\mathbf{J}$ ，因此超导体内部电流处处为零。

将这个条件带回式 2.22，则在超导体内部有

$$\hbar \nabla \theta = e\mathbf{A} \quad (2.24)$$

根据磁通量定义，可以写出

$$\Phi = \oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \frac{\hbar}{e} \oint_L \nabla \theta \cdot d\mathbf{l} = \frac{\hbar}{e} \oint_L d\theta \quad (2.25)$$

由于 θ 为波函数相位， θ 沿闭路积分的值只能为 $2n\pi$ ，即可写出磁通量

$$\Phi = \frac{2n\pi\hbar}{e} \quad (2.26)$$

即超导体的磁通量为量子化的，其量子化单位为

$$\Phi_0 = \frac{2\pi\hbar}{e} \quad (2.27)$$

3. 约瑟夫森关系

虽然穿过约瑟夫森结绝缘区的是电子，但由于电子是费米子，根据泡利不相容原理，如果认为传导电子是相互独立的，那么不同的传导电子就不可能处于相同的量子态，也就不能被整体描述为超导电流。但是库珀对由两个费米子组成，是一个玻色子，在低温下会凝聚到相同的最低能态上。故可以利用库珀对来讨论超导电流问题，不妨设超导体 1、2 中的库珀对波函数为

$$\begin{aligned} \Psi_1(x, t) &= \sqrt{\rho_1} e^{i\theta_1(x, t)} \\ \Psi_2(x, t) &= \sqrt{\rho_2} e^{i\theta_2(x, t)} \end{aligned} \quad (2.28)$$

在实践中，两侧的超导体通常由相同材料制成，且库珀对均匀分布，故一般有 $\rho_1 = \rho_2 = \rho$ 为常数。因此超导电流只和库珀对在两侧的波函数相位差有关。

将库珀对波函数带入 2.23 中计算，由于此时没有外部电源激励，系统处于稳定状态，因此方程右侧与事件无关，因此可以分离变量，记左侧 $-\hbar \frac{\partial \theta}{\partial t} = \epsilon(x)$ ，解得波函数相位与 x 和 t 的关系为

$$\theta(x, t) = \theta_0(x) - \frac{\epsilon(x)t}{\hbar} \quad (2.29)$$

因此库珀对的波函数 2.28 可以写成

$$\Psi(x, t) = \Psi(x) e^{\frac{i\epsilon(x)t}{\hbar}} \quad (2.30)$$

根据薛定谔方程的含时演化，我们就可以直接将 $\epsilon(x) = \frac{m}{2\rho^2} \mathbf{J}^2 + V(\mathbf{x})$ 记为库珀对的能量。

在此我们作以下规定：两侧的超导体分别标记为 1 和 2，记库珀对的势能为 $V(x) = 0$ ，能量为 $\epsilon = \frac{m}{2\rho^2} \mathbf{J}^2$ 。假设绝缘层的势垒为 $V(x)$ ， $V(x) > \epsilon$ ，绝缘区的范围在 $x = -a$ 到 $x = a$ 。那么就有动量函数 $p(x) = \sqrt{2m(\epsilon - V(x))}$ 。我们的目的就是求解得出绝缘区内的电流密度规律。

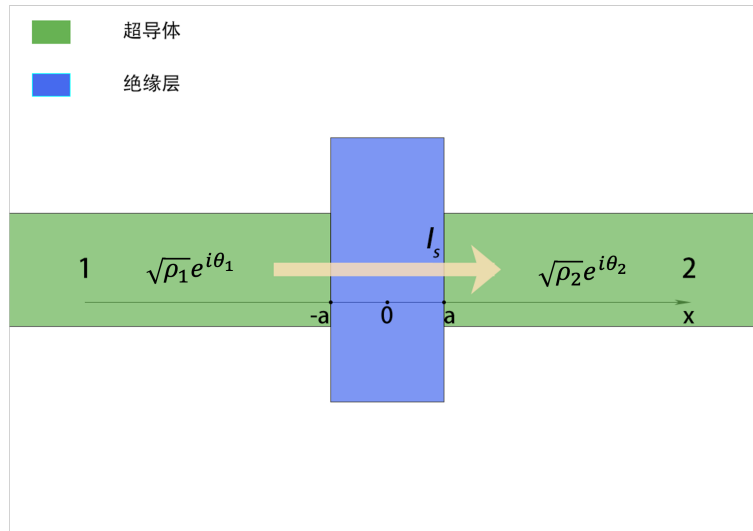


图 2.1 约瑟夫森结示意图

显然此时的动量函数是一个纯虚数，应写为

$$p(x) = \sqrt{2m(\epsilon - V(x))} = -i\sqrt{2m(V(x) - E)} \quad (2.31)$$

带入一维薛定谔方程的 WKB 近似方程

$$\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{p(x)}} e^{\pm i \int^x p(x) dx / \hbar} \quad (2.32)$$

得到 WKB 指数衰减和指数增长的两种解，不妨取其线性组合为

$$\Psi(x) = Ae^{-\frac{1}{\hbar} \int_{-a}^x \sqrt{2m(V(x)-\epsilon)} dx} + Be^{-\frac{1}{\hbar} \int_x^a \sqrt{2m(V(x)-\epsilon)} dx} \quad (2.33)$$

记 $d = e^{-\frac{1}{\hbar} \int_{-a}^a \sqrt{2m(V(x)-\epsilon)} dx}$ ，有绝缘区边界值为

$$\Psi(-a) = A + Bd, \quad \Psi(a) = Ad + B \quad (2.34)$$

由于边界点同时处在超导区和绝缘区，可以给出连续性方程

$$\begin{aligned} \Psi(-a) &= A + Bd = \sqrt{\rho_1} e^{i\theta_1} \\ \Psi(a) &= Ad + B = \sqrt{\rho_2} e^{i\theta_2} \end{aligned} \quad (2.35)$$

由此求得线性组合待定系数为

$$A = \frac{\sqrt{\rho_1} e^{i\theta_1} - d \sqrt{\rho_2} e^{i\theta_2}}{1 - d^2}, \quad B = \frac{\sqrt{\rho_2} e^{i\theta_2} - d \sqrt{\rho_1} e^{i\theta_1}}{1 - d^2} \quad (2.36)$$

此时解得绝缘区内的库珀对波函数，虽然电子是费米子，但库珀对是玻色子，将波函数带入前述一维概率流密度表达式 2.18 中得到

$$\mathbf{J}_x = \frac{2d}{1 - d^2} \frac{\sqrt{2m(V(x) - \epsilon)}}{m} \sqrt{\rho_1 \rho_2} \sin(\theta_2 - \theta_1) \quad (2.37)$$

进一步根据 $\mathbf{J}_e = eN\mathbf{J}$ 得到电流密度为

$$\mathbf{J}_e = eN \frac{2d}{1 - d^2} \frac{\sqrt{2m(V(x) - \epsilon)}}{m} \sqrt{\rho_1 \rho_2} \sin(\theta_2 - \theta_1) \quad (2.38)$$

记临界电流 $\mathbf{J}_c = eN \frac{2d}{1 - d^2} \frac{\sqrt{2m(V(x) - \epsilon)}}{m} \sqrt{\rho_1 \rho_2}$ ，即可得到

$$\mathbf{J}_e = \mathbf{J}_c \sin(\theta_2 - \theta_1) \quad (2.39)$$

这即为第一条约瑟夫森关系，可将概率流密度替换成通过结的电流强度。

但上述模型仅为认为两侧超导体无限延伸（无限延伸其实相当于两端直接相连）的情形，在实际应用场景中我们需要驱动约瑟夫森结，在其两端加上电压，此时库珀对就不能继续维持定态，超导概率流密度和相位差也随时间变化，但可以证明仍能得到类似的概率流密度关系。

添加电压之后对库珀对的直接影响为改变其外电势为 ϕ ，此时我们不能将库珀对的势能直接取成 0，而是 $V(x) = e\phi$ 。带入 2.23 得到

$$-\hbar \frac{\partial \theta}{\partial r} = \frac{m}{2\rho^2} \mathbf{J}^2 + e\phi \quad (2.40)$$

对于约瑟夫森结，我们假设加在两端的电势分别为 ϕ_1 和 ϕ_2 ，由规范不变性要求，当带电粒子在矢量势 \mathbf{A} 中沿着某条轨迹 L 运动时，其量子力学波函数概

率幅要乘上因子 $\exp(i\frac{e}{\hbar} \int_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l})$ ，因此需要库珀对左右两边的波函数相位差不能简单的写成 $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$ ，而应该根据规范不变性改写成

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1 - \frac{e}{\hbar} \int_a^b \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \quad (2.41)$$

将其带入 2.23 可以计算得到第二条约瑟夫森关系

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta\theta}{\partial t} &= \left(\frac{\partial \theta_2}{\partial t} - \frac{\partial \theta_1}{\partial t} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \frac{e}{\hbar} \int_{-a}^a \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \\ &= -\frac{e}{\hbar} (\theta_2 - \theta_1) - \frac{e}{\hbar} \int_{-a}^a \frac{\partial \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}}{\partial t} \\ &= \frac{2\pi}{\Phi_0} \int_{-a}^a (-\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}) \cdot d\mathbf{l} \\ &= \frac{2\pi}{\Phi_0} \int_{-a}^a \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \\ &= \frac{2\pi}{\Phi_0} U \end{aligned} \quad (2.42)$$

由此我们就得到了第二条约瑟夫森关系

$$U = \frac{\Phi_0}{2\pi} \frac{\partial \Delta\theta}{\partial t} \quad (2.43)$$

2.2 超导量子比特的原理

2.2.1 LC 振荡电路基础

对于最基础的弹簧振子，我们可以写出拉氏量

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2 \quad (2.44)$$

求出广义动量为

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m \dot{x} \quad (2.45)$$

并给出哈密顿量为

$$\mathcal{H} = p \dot{x} - \mathcal{L} = \frac{p^2}{2m} + \frac{kx^2}{2} \quad (2.46)$$

对于 LC 振荡电路，我们可以取广义坐标为电感上的磁通量 Φ ，仿照弹簧振子的形式写出拉氏量

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} C \dot{\Phi}^2 - \frac{1}{2L} \Phi^2 \quad (2.47)$$

其中 $\dot{\Phi} = V$ ，广义动量为

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Phi}} = C \dot{\Phi} = Q \quad (2.48)$$

即 $\{\Phi, Q\}$ 组成一对共轭变量。

则 LC 振荡电路的哈密顿量为

$$\mathcal{H} = Q\dot{\Phi} - \mathcal{L} = \frac{Q^2}{2C} + \frac{\Phi^2}{2L} \quad (2.49)$$

由以上推导过程可知 LC 振荡电路中参量与弹簧振子中参量存在对应关系

$$\begin{aligned} x &\rightarrow \Phi \\ p &\rightarrow Q \\ m &\rightarrow C \\ k &\rightarrow \frac{1}{L} \end{aligned} \quad (2.50)$$

2.2.2 量子化的 LC 振荡电路

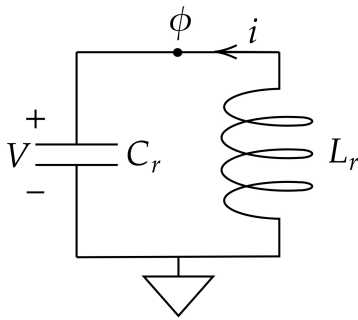


图 2.2 量子化的 LC 振荡电路

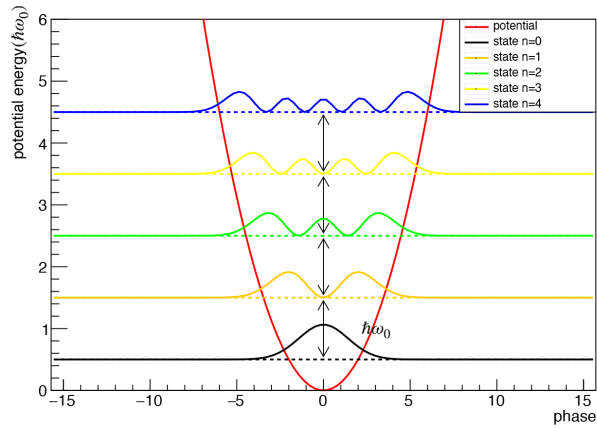


图 2.3 对应势能 (等距能级)

量子化的 LC 谐振电路哈密顿量和对易关系为

$$\hat{H} = \frac{\hat{\Phi}^2}{2L} + \frac{\hat{Q}^2}{2C} \quad (2.51)$$

$$[\hat{\Phi}, \hat{Q}] = i\hbar \quad (2.52)$$

仿照量子化的谐振子模型，使用产生（湮灭）算符有

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\hbar\omega_0(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}) \quad (2.53)$$

$$E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega_0 \quad (2.54)$$

同时也可引入 $\Phi_0 = \frac{h}{2e}$ 为超导磁通量子，并令

$$\begin{aligned} \hat{\phi} &= \frac{2\pi\hat{\Phi}}{\Phi_0} \\ \hat{n} &= \frac{\hat{Q}}{2e} \end{aligned} \quad (2.55)$$

则 $[\hat{\phi}, \hat{n}] = i$ ，且 $\hat{\phi}, \hat{n}$ 均为无量纲量。

哈密顿量可以改写为

$$H = 4E_C \hat{n}^2 + \frac{1}{2} E_L \hat{\phi}^2 \quad (2.56)$$

$E_C = \frac{e^2}{2C}$ 为一个电子在电容器上的能量， $E_L = \frac{\hbar^2}{4e^2 L}$ 为对应的电感上的能量。

如图 2.3, 此时能级 $E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega_0$ ，为等间距能级。但为了量子计算的寻址便利，我们希望 $\omega^{0 \rightarrow 1}$ 和 $\omega^{1 \rightarrow 2}$ 区别足够大，也就是构造非谐性。

2.2.3 约瑟夫森结的引入

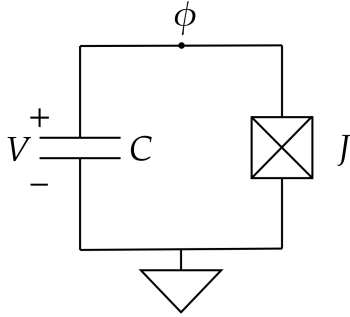


图 2.4 引入约瑟夫森结的电路 (CPB)

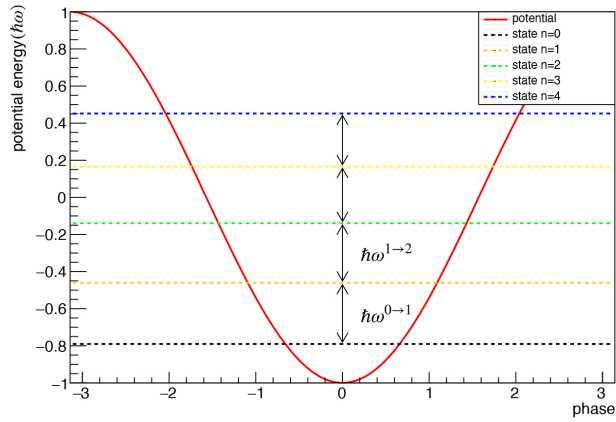


图 2.5 对应势能 (非等距能级)

将 LC 振荡电路的哈密顿量写成电荷能和电感能的形式

$$H = 4E_C n^2 + \frac{1}{2} E_L \phi^2 \quad (2.57)$$

应用一个约瑟夫森结来替代原 QHO 电路中的电感，根据约瑟夫森关系

$$I = I_c \sin(\phi), V = \frac{\hbar}{2e} \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (2.58)$$

联立 2.58 得到约瑟夫森结的电感为

$$L_J = UI \left(\frac{dI}{dt} \right) = \frac{\Phi_0}{2\pi I_c \cos(\phi)} \quad (2.59)$$

后续的求解与前述量子化的 LC 振荡电路一致，分别求出此超导电路中的动能和势能，再根据拉格朗日方程求出哈密顿量。此约瑟夫森结作为非线性电感储存的能量（势能）为

$$\begin{aligned} W &= \int_0^t V(t) I(t) dt \\ &= \frac{\hbar}{2e} \int_0^t I_c \sin(\phi) \frac{\partial \phi}{\partial t} dt \\ &= -E_J \cos(\phi) \end{aligned} \quad (2.60)$$

此处记 $E_J = \frac{\Phi_0 I_c}{2\pi}$ 为约瑟夫森结的约瑟夫森能, 将 2.57 中的电感能 E_L 替换得到此非线性电路, 其哈密顿量为

$$H = 4E_C n^2 - E_J \cos(\phi) \quad (2.61)$$

如图 3.5, 约瑟夫森结使势能由二次型变为余弦型, 构造了可寻址的量子两能级系统。这其实就是第一个人造量子比特——电荷量子比特 (CPB)。

下面我们使用微扰论参考哈密顿量对其能级和波函数做出计算:

引入约瑟夫森结替代线性电感后, 量子电路的哈密顿量发生改变, 由 2.61 有

$$H = 4E_C n^2 - E_J \cos(\phi) \quad (2.62)$$

这个哈密顿量不存在解析解, 因此我们将势能项的余弦函数泰勒展开到四次项, 并作一阶微扰近似, 过程如下:

$$\begin{aligned} H &= 4E_C n^2 - E_J \cos(\phi) \\ &= 4E_C n^2 + \frac{1}{2} E_J \phi^2 - E_J - \frac{1}{24} E_J \phi^4 \end{aligned} \quad (2.63)$$

哈密顿量的前两项与 QHO 模型一致, 但常数 E_L 不同于 E_J , 因此我们继承 QHO 模型中的变量/常量等思路 (2.50), 做如下常量变换以对应一维谐振子

$$\begin{aligned} x &\rightarrow \Phi \\ p &\rightarrow Q \\ m &\rightarrow \frac{e^2}{2E_C} \\ \omega &\rightarrow \sqrt{\frac{8E_C E_J}{\hbar}} \end{aligned} \quad (2.64)$$

得到 $\hbar\omega = \sqrt{8\hbar E_J E_C}$, 并取产生 (湮灭) 算符为

$$\begin{aligned} b &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x + \frac{i}{\sqrt{m\omega\hbar}} p \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt[4]{\frac{\hbar E_J}{32E_C}} \phi + \frac{2i}{\sqrt[4]{\frac{2\hbar E_J}{E_C}}} n \right) \\ b^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x - \frac{i}{\sqrt{m\omega\hbar}} p \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt[4]{\frac{\hbar E_J}{32E_C}} \phi - \frac{2i}{\sqrt[4]{\frac{2\hbar E_J}{E_C}}} n \right) \end{aligned} \quad (2.65)$$

产生 (湮灭) 算符满足的对易关系表示为

$$[b, b^\dagger] = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (2.66)$$

产生（湮灭）算符对 Fock 态的作用结果表示为

$$b^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle, b |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle \quad (2.67)$$

用产生（湮灭）算符可将哈密顿量表示为

$$H = \sqrt{8\hbar E_J E_c} (b^\dagger b + \frac{1}{2}) - E_J - \frac{E_c}{3\hbar} (b + b^\dagger)^4 \quad (2.68)$$

用二阶微扰论进行计算，首先把微扰相互作用重写为

$$\begin{aligned} V &= -\frac{E_c}{3\hbar} (b + b^\dagger)^4 \\ &= -\frac{4E_c}{3\hbar} [b^\dagger b^\dagger (b^\dagger b) + (b^\dagger b) b b] - \frac{2E_c}{\hbar} [b^\dagger b^\dagger + b b] \\ &\quad - \frac{E_c}{3\hbar} [b^4 + (b^\dagger)^4] - \frac{2E_c}{\hbar} [(b^\dagger b)^2 + (b^\dagger b) + \frac{1}{2}] \end{aligned} \quad (2.69)$$

这样就能得到 V 的非零矩阵元为

$$\begin{aligned} \langle n+4|V|n\rangle &= \langle n|V|n+4\rangle = -\frac{E_c}{3\hbar} \sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} \\ \langle n+2|V|n\rangle &= \langle n|V|n+2\rangle = -\frac{4E_c}{3\hbar} (n + \frac{3}{2}) \sqrt{(n+1)(n+2)} \\ \langle n|V|n\rangle &= -\frac{2E_c}{\hbar} (n^2 + n + \frac{1}{2}) \end{aligned} \quad (2.70)$$

根据二阶微扰能量公式，计算得到能级为

$$\begin{aligned} E_n^{(2)} &= \varepsilon_n + \langle n|V|n\rangle + \sum_{m \neq n} \frac{|\langle m|V|n\rangle|^2}{\varepsilon_n - \varepsilon_m} \\ &= -E_J + (n + \frac{1}{2}) \sqrt{8\hbar E_J E_c} - \frac{2E_c}{\hbar} (n^2 + n + \frac{1}{2}) \\ &\quad - \frac{8E_c^2}{9\hbar^2 \sqrt{8\hbar E_J E_c}} (n + \frac{3}{2})^2 (n+1)(n+2) \\ &\quad - \frac{E_c}{18\hbar^2 \sqrt{8\hbar E_J E_c}} (n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \end{aligned} \quad (2.71)$$

进一步的我们还可以根据微扰论得到一阶微扰波函数为

$$\begin{aligned} |\psi_n^{(1)}\rangle &= |n\rangle + \sum_{m \neq n} \frac{\langle m|V|n\rangle}{\varepsilon_n - \varepsilon_m} |m\rangle \\ &= |n\rangle - \frac{2E_c (n + \frac{3}{2}) \sqrt{(n+1)(n+2)}}{3\hbar \sqrt{8\hbar E_J E_c}} |n+2\rangle \\ &\quad - \frac{E_c \sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}}{12\hbar \sqrt{8\hbar E_J E_c}} |n+4\rangle \end{aligned} \quad (2.72)$$

但是考虑到二阶微扰处理得到围绕能量正比于 n^4 ，对原结果的扰动非常大，因此使用微扰论进行求解是非常不负责任且错误的。其实直接根据哈密顿量解本征方程的矩阵简单而有效，截断误差可控，但笔者查阅大量相关文献和博士论文，发现众作者均采用了一阶微扰计算能量，得到 $E_n^{(1)} = -E_J + (n + \frac{1}{2})\sqrt{8\hbar E_J E_c} - \frac{2E_c}{\hbar}(n^2 + n + \frac{1}{2})$ ，并令人惊奇的能够在能级二阶微扰失效的情况下给出波函数的一阶微扰图像。这样的结果是不负责任的

下面我们重新使用解本征方程的形式求解能级，由于对易关系 $[n, \phi] = i$ ，因此有 $n = -i\frac{d}{d\phi}$ ，作用在 n 的本征态上得到 $n|n\rangle = -i\frac{d}{d\phi}|n\rangle \rightarrow |n\rangle = e^{in\phi}$ 。哈密顿量的势能项也修改为 $\cos(\phi) = \frac{1}{2}(e^{i\phi} + e^{-i\phi}) = \frac{1}{2}(|n+1\rangle\langle n| + |n\rangle\langle n+1|)$ ，这样我们就得到粒子数表象下的哈密顿量为

$$H = \sum_n 4E_c n^2 |n\rangle\langle n| - \frac{E_J}{2} (|n+1\rangle\langle n| + |n\rangle\langle n+1|) \quad (2.73)$$

在本征基下可以表示为如下矩阵

$$H = \begin{bmatrix} 4E_c \cdot 0^2 & -\frac{E_J}{2} & & & & \\ -\frac{E_J}{2} & 4E_c \cdot 1^2 & -\frac{E_J}{2} & & & \\ & -\frac{E_J}{2} & 4E_c \cdot 2^2 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & -\frac{E_J}{2} & \\ & & & & -\frac{E_J}{2} & 4E_c \cdot n^2 \end{bmatrix}$$

将矩阵带入 mathematica 求特征值数值解，得到的能级绘制如下。

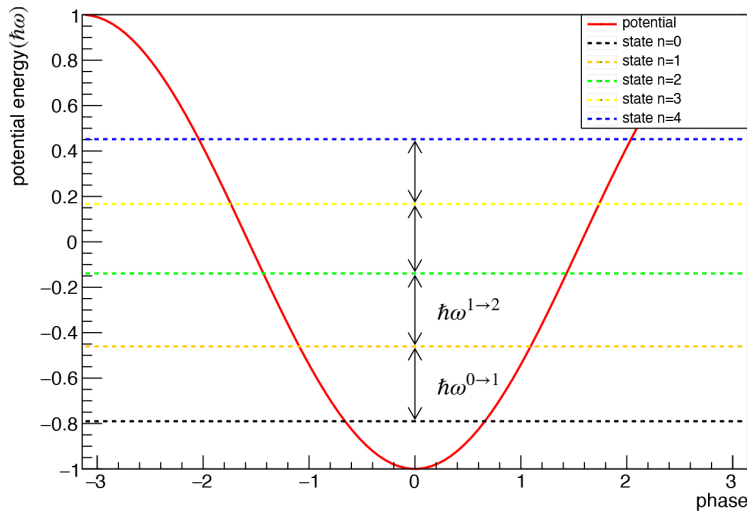


图 2.6 对应势能 (非等距能级)

但这种设计一般存在 $E_C \gg E_J$ 的情况，电荷噪声大，现阶段使用的基本为在此基础上改进的 Transmon 量子比特。^[22-23]

2.2.4 直流超导量子干涉仪 (dc-squid) 的引入

为了实现超导量子比特的频率可调，使用两个约瑟夫森结构成一个超导环路，得到 dc-squid (dc-superconducting quantum interference device) (如图 2.7)。

根据环路磁通量子化关系和约瑟夫森关系，易得电流和约瑟夫森能量为

$$I = 2I_{c1} \cos\left(\pi \frac{\Phi_{ext}}{\Phi_0}\right) \sin\left(\phi_1 + \pi \frac{\Phi_{ext}}{\Phi_0}\right) \quad (2.74)$$

$$E_J = \frac{\Phi_0}{2\pi} I_C = \frac{\Phi_0}{2\pi} 2I_{c1} \cos\left(\pi \frac{\Phi_{ext}}{\Phi_0}\right) \quad (2.75)$$

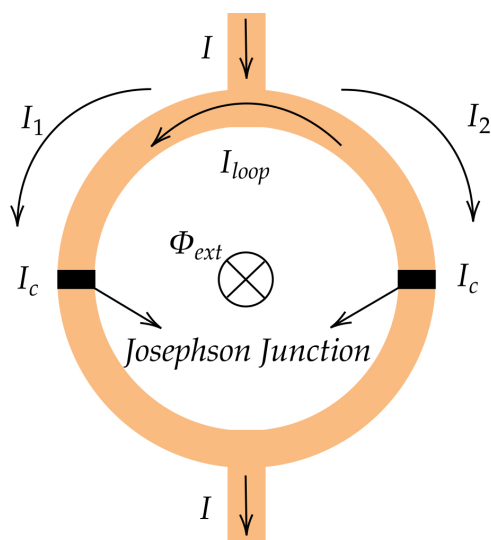


图 2.7 dc squid 示意图

由此可将 dc squid 等效为一个临界电流可变的约瑟夫森结，临界电流通过外部磁场调控。因此可以直接带入之前的分析作替换。但这也引入了磁通噪声。使用 dc-squid 替换单个约瑟夫森结是 Transmon 量子比特设计时的常用手段。

第3章 量子比特的设计

3.1 主流方案——Transmon 量子比特

为了降低电荷噪声，给约瑟夫森结并联电容 C_g ，设计出了 Transmon。^[24-25]

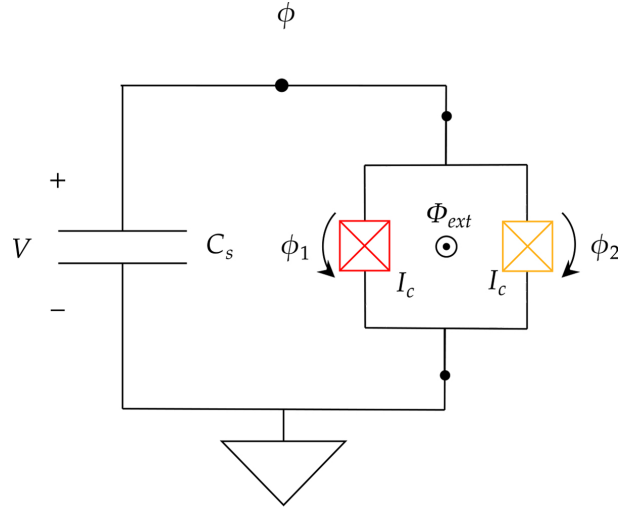


图 3.1 对称 dc-squid 型 Transmon

系统的哈密顿量为

$$H = 4E_c(n - n_g)^2 - E_J \cos(\phi) \quad (3.1)$$

因为此时有 $E_C \ll E_J$ ，可以把势能项展开

$$E_J \cos \phi = E_J - \frac{1}{2} E_J \phi^2 + \frac{1}{24} E_J \phi^4 + o(\phi^6) \quad (3.2)$$

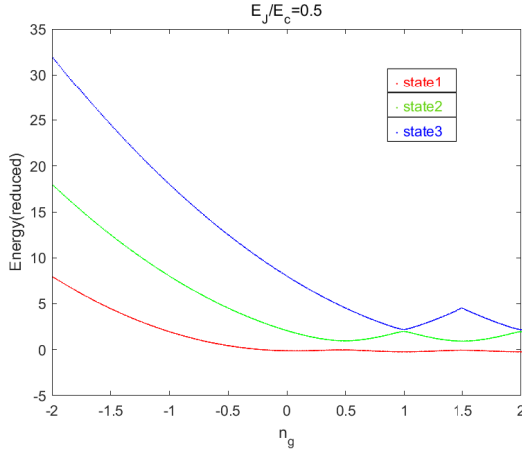
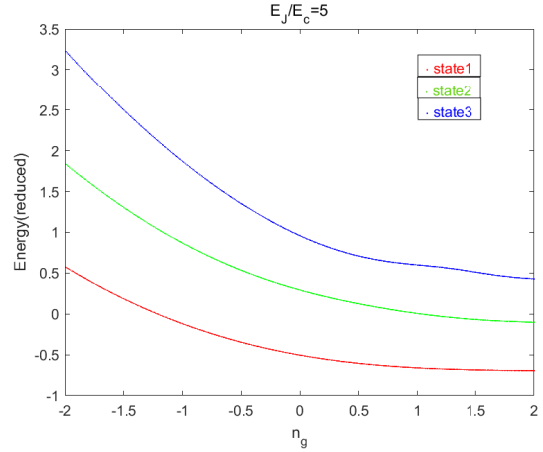
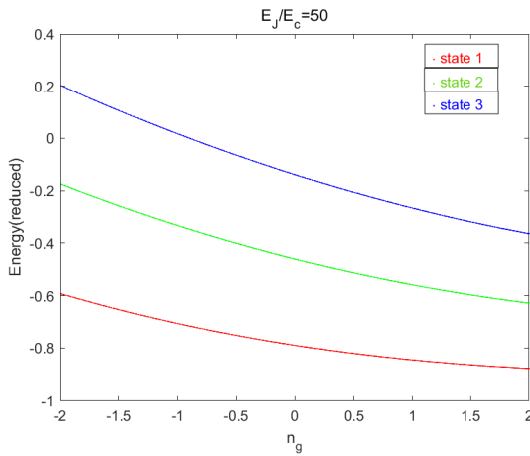
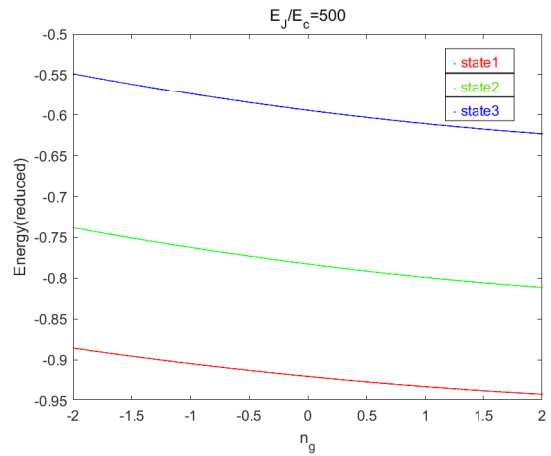
与先前对 CPB 的计算相当，唯一区别是引入的并联电容 C_g ，这里无论是单独给 dc-squid 的每一个约瑟夫森结加上并联电容，还是对 dc-squid 整体加上等效电容，由于电容的并联，实质上效果相同。故图 3.1 中未直接标识，避免误解。

3.1.1 电荷噪声的影响和抑制方法

由于引入并联电容 C_g ，需要将哈密顿量中的电荷粒子数修正为 $n - n_g$ ，其中 n_g 为有效补偿电荷。可以看出对电荷噪声的抑制。此时式中的 $E_c = \frac{e^2}{C_J + C_g + C_s}$ 。

但需要注意的是，我们通过引入 n_g 来抑制 n 的噪声，但又引入的 n_g 的噪声，因此需要通过增大 E_J/E_c 来抑制 n_g 的噪声。

如图可知，电荷噪声随着 E_J/E_c 的值增大到 50 左右时不断被抑制，但继续增大 E_J/E_c 会使能级变为负数，失去物理意义，这与祖冲之号量子计算机上选择的 Transmon 设计数据是吻合的。


 图 3.2 $E_J/E_c = 0.5$ 时的电荷噪声

 图 3.3 $E_J/E_c = 5$ 时的电荷噪声

 图 3.4 $E_J/E_c = 50$ 时的电荷噪声

 图 3.5 $E_J/E_c = 500$ 时的电荷噪声

3.1.2 磁通噪声的影响和抑制方法

下面讨论使用 dc-squid 引入磁通噪声的影响和降低方法。为方便计算，这里将约瑟夫森结引入的非谐性用一阶微扰能量 $E_n^{(1)} = -E_J + (n + \frac{1}{2})\sqrt{8\hbar E_J E_c} - \frac{2E_c}{\hbar}(n^2 + n + \frac{1}{2})$ 来表示，其两能级为 $\sqrt{8\hbar E_c E_J} - E_c$ 和 $\sqrt{8\hbar E_c E_J} - 2E_c$

联立下三式，并取 $\hbar = \Phi_0 = I_{c1} = 1, E_c = 0.02$ 。在 matlab 中绘制图像，需要提醒的是，在此我们对能级的复数解取模值进行绘图。

$$\begin{aligned}\omega^{0 \rightarrow 1} &= \sqrt{8\hbar E_c E_J} - E_c \\ \omega^{1 \rightarrow 2} &= \sqrt{8\hbar E_c E_J} - 2E_c \\ E_J &= \frac{\Phi_0}{2\pi} 2I_{c1} \cos\left(\pi \frac{\Phi_{ext}}{\Phi_0}\right)\end{aligned}\quad (3.3)$$

由图 3.6，外加磁场的稳定性会影响比特频率的稳定性，此影响在 $\Phi_{ext} = k\pi$ 时最小， $\Phi_{ext} = \frac{2k+1}{2}\pi$ 时最大。这一点和祖冲之量子计算机上的选取参数吻合。

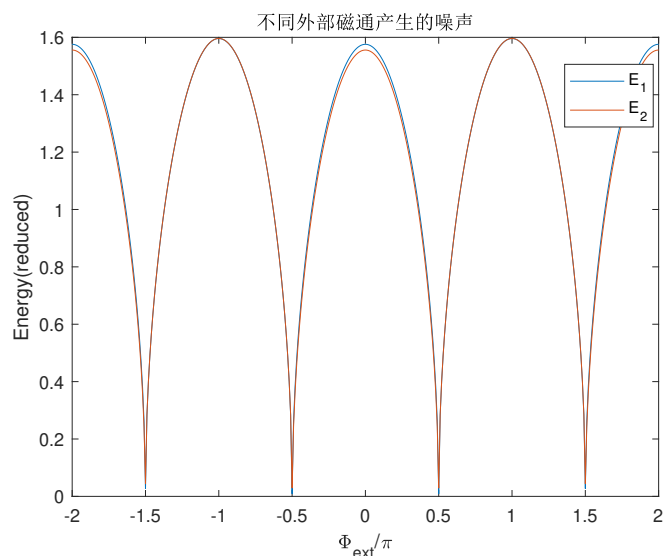


图 3.6 外部磁通对系统的噪声影响

由上可知，引入 dc-squid 虽然实现了等效约瑟夫森结的临界电流可调，但也会带来磁通噪声，且此噪声在特定外部磁通条件下的影响是巨大的。为降低量子比特对磁通噪声的敏感性，同时保持量子门的可调性，最近的研究设计了非对称 dc-squid，即讲原来的 dc-squid 中并联的两个完全相同的约瑟夫森结换成两个面积不一大的约瑟夫森结，使得两侧的电

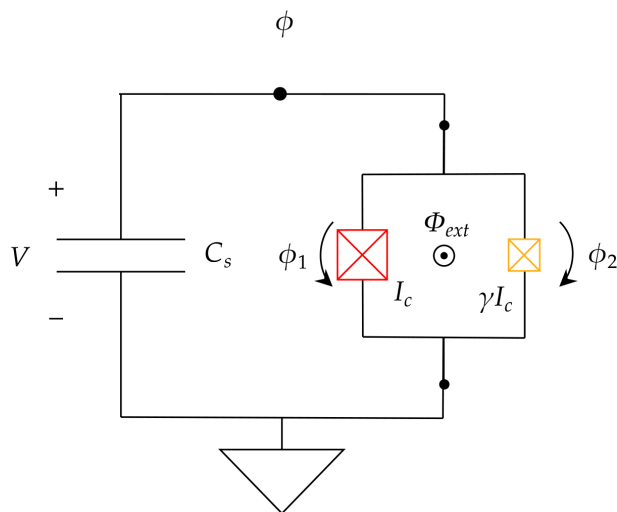


图 3.7 非对称 dc-squid 型 Transmon

其哈密顿量为

$$H = 4E_C n^2 - E_{J\Sigma} \sqrt{\cos^2\left(\pi \frac{\Phi_{ext}}{\Phi_0}\right) + d^2 \sin^2\left(\frac{\Phi_{ext}}{\Phi_0}\right)} \cos(\phi) \quad (3.4)$$

其中 $E_{J\Sigma} = E_{J1} + E_{J2}$, $d = (\gamma - 1)/(\gamma + 1)$, $\gamma = E_{J2}/E_{J1}$ 。

当 $|d| \rightarrow 0$ 时，模式变为前述对称 dc-squid 模式；当 $|d| \rightarrow 1$ 时，模式变为单个约瑟夫森结。这样就实现了我们在电荷噪声和磁通噪声之间取舍的选择。

3.2 小众方案——Fluxonium 量子比特

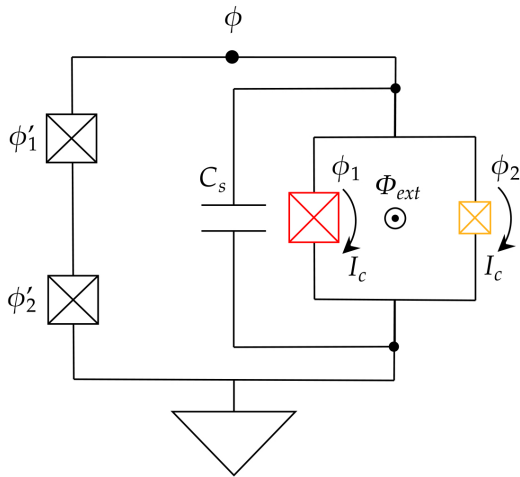


图 3.8 Flux qubit

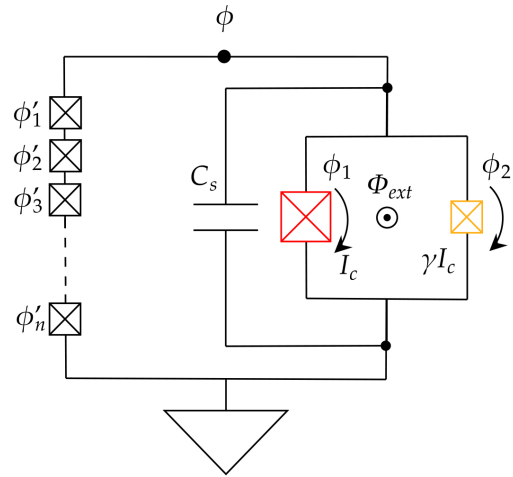


图 3.9 Fluxonium

Transmon 设计存在的一个问题是非谐性不够大，在单比特门操作时高能级会影响保真度，通过将两条并联支路改成如图 3.8 形式可以根本上改变势能形式，得到 Flux Qubit，其哈密顿量为

$$H \approx 4E_C n^2 - E_J \cos(2\phi + 2\pi \frac{\Phi_{ext}}{\Phi_0}) - 2\gamma E_J \cos(\phi) \quad (3.5)$$

第二项是小面积约瑟夫森结的势能，第三项是两个大面积结的势能，这样整体的势能不再是 \cos 形式，而是过余弦形式，非谐性被增大。但与 Asymmetric Transmon 相比，该设计对磁通噪声敏感度大，也不是主流方案。

近几年，在学术界和工业界都大量使用的 Transmon 之余，也有一些研究基于 Fluxonium 实现了较高的保真度。Fluxonium 在 Flux Qubit 的基础上，进一步增加约瑟夫森结阵列的数量，如图 3.9，其哈密顿量为

$$H \approx E_C n^2 - E_J \cos(\phi + 2\pi \frac{\Phi_{ext}}{\Phi_0}) + \frac{\gamma}{2N} \phi^2 \quad (3.6)$$

但是制备出 100 数量级个同样的约瑟夫森结又是一大挑战，并且在量子比特的驱动、耦合以及读取方面还比较困难，尚不能如 Transmon 一般完成整体测控，故目前还是小众方案。

第 4 章 量子比特的微纳加工

超导量子比特正是因为可借鉴成熟的半导体微纳加工工艺，故硬件方面发展迅速，量子器件的保真度高，有必要介绍一些超导量子比特的微纳加工工艺。

4.1 设计思路

首先根据量子比特的原理，如 Transmon 量子比特的能级和噪声特征等信息，找到电路参数和比特参数之间的关系，并通过设计的比特参数来开发电路，利用有限元分析软件得到最终的处理器设计图。

设计图完成后，即需要根据设计图制备出实体的量子比特处理器，加工工艺包括曝光、显影、刻蚀、沉积、去胶等步骤，最终将得到的量子比特处理器放入样品盒，连接稀释制冷剂和电子学系统进行测试。

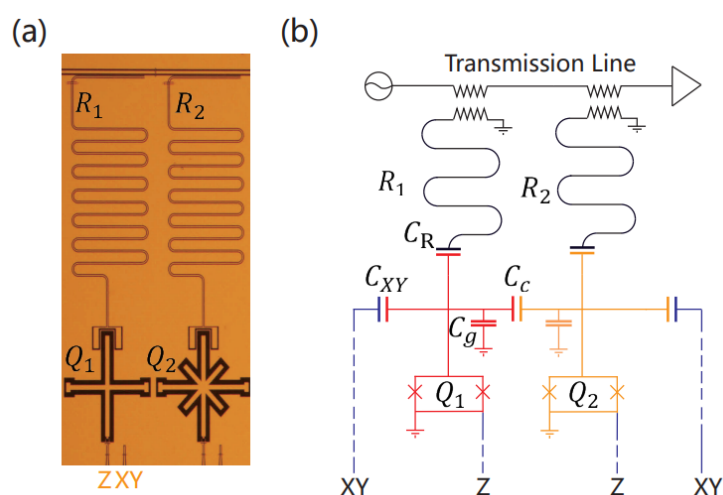


图 4.1 (a) 超导量子比特的光学显微镜图片，Q 为量子比特，R 为耦合读取腔，其间连接的为控制线和偏置线，(b) 超导量子比特的等效电路图，通过 XY 控制线连接电压源激励驱动，通过对地电容调节非谐性，通过 Z 线调节外部磁通量^[26]

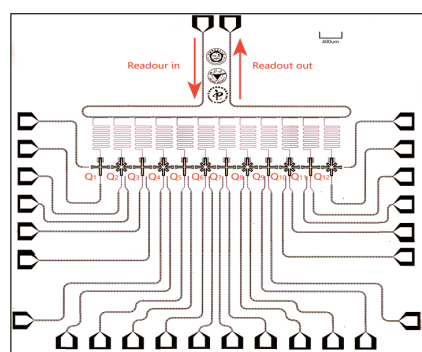


图 4.2 12 比特超导量子芯片电路图^[26]

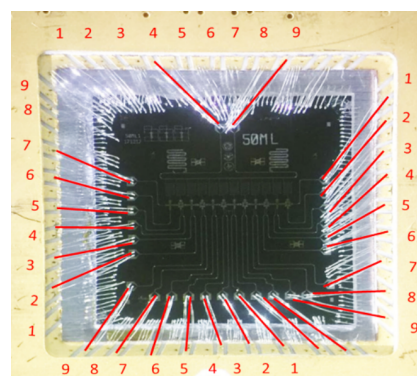


图 4.3 12 比特超导量子芯片实物图^[26]

4.2 量子芯片加工工艺

4.2.1 镀膜技术

超导量子比特的电容、谐振腔、控制线等部分均使用蓝宝石衬底镀 100nm 厚度的铝膜，蓝宝石衬底能够使共面波导损耗降低，且衬底表面清洁简单。

以往的传统镀膜方式为离子束溅射沉积技术 (IBSD)，其利用离子和固体的相互作用，把低能离子束 ($< 2000\text{eV}$) 定向到靶材上发生溅射，靶材粒子溅射后在衬底上沉积，使得薄膜生长。

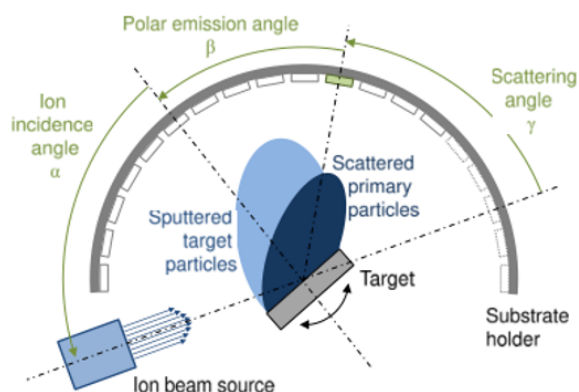


图 4.4 离子束溅射沉积技术生长非晶态膜^[27]

近期中国科大潘建伟院士团队钟东勋老师正在搭建新一代简化版磁控等离子体辅助溅射镀膜平台，相较于传统的 IBSD 技术，该技术能极大地降低镀膜表面的粗糙度，预试验经 AFM 验证已取得两个数量级的粗糙度降低。

4.2.2 约瑟夫森结的制备

约瑟夫森结是超导量子比特的核心器件，该部分使用涂胶、曝光、显影、镀膜、剥离等一系列工艺。下面介绍“ $Al - AlO_x - Al$ ”约瑟夫森结的制备流程^[28]。

1. 在片子上涂上电子束光刻胶 MMA EL9。然后再涂上电子束光刻胶 PMMA 950A5，作为 undercut 层和图形定义层。

(1)涂胶(SiO_2 undercut)



(2)涂胶(SiO_2 图形定义)



图 4.5 一次涂胶

2. 在 100kV 电子束曝光机 EBPG 上曝光结区图形，定义约瑟夫森结的图形。
3. 在显影液 MIBK: IPA (1:3) 中显影，然后 IPA 定影，氮气吹干。
4. 将样品安置在镀膜设备的 load lock 腔体中，使用 Ar 离子轰击样品，去除比特电容与约瑟夫森结连接处的氧化层，为约瑟夫森结制备超导接触；然后将样

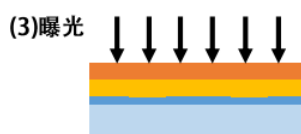


图 4.6 一次曝光

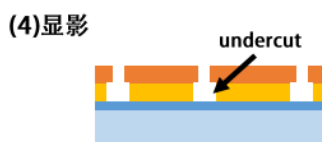


图 4.7 一次显影

品输送到蒸发室，先倾斜-62.2° 沉积，镀 65 nm 厚的下电极铝膜。

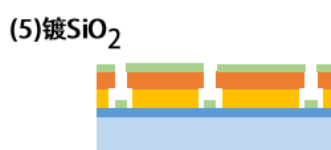


图 4.8 镀约瑟夫森结下电极

5. 用去胶液浸泡片子，进行剥离。然后用 IPA 淋洗，氮气吹干。

6. 氧化得到氧化层：将样品输送到氧化室，根据设计的约瑟夫森结常温电阻条件控制氧化参数，进行下电极的氧化，期间包含二次涂胶、二次曝光和二次显影，不再图示。

7. 将样品输送回蒸发室，垂直沉积，镀 100 nm 厚的上电极铝膜。然后再将样品输送到氧化室，进行铝膜表面的氧化，防止杂气污染。



图 4.9 镀约瑟夫森结上电极

8. 使用 PGRemover 去胶液进行去胶，只留下约瑟夫森结。

(12)剥离(lift-off)



图 4.10 剥离去胶，留下约瑟夫森结

参 考 文 献

- [1] BENIOFF P. The computer as a physical system - a microscopic quantum-mechanical hamiltonian model of computers as represented by turing-machines[J]. JOURNAL OF STATISTICAL PHYSICS, 1980, 22(5): 563-591.
- [2] FEYNMAN R. Simulating physics with computers[J]. INTERNATIONAL JOURNAL OF THEORETICAL PHYSICS, 1982, 21(6-7): 467-488.
- [3] DEUTSCH D. Quantum-theory, the church-turing principle and the universal quantum computer[J]. PROCEEDINGS OF THE ROYAL SOCIETY OF LONDON SERIES A-MATHEMATICAL PHYSICAL AND ENGINEERING SCIENCES, 1985, 400(1818): 97-117.
- [4] YAO A C C. Quantum circuit complexity[C]//IEEE Computer Society: 34TH ANNUAL SYMPOSIUM ON FOUNDATIONS OF COMPUTER SCIENCE, PROCEEDINGS. 1993: 352-361.
- [5] SHOR P. Algorithms for quantum computation - discrete logarithms and factoring[C]//GOLDWASSER S. ANNUAL SYMPOSIUM ON FOUNDATIONS OF COMPUTER SCIENCE: 35TH ANNUAL SYMPOSIUM ON FOUNDATIONS OF COMPUTER SCIENCE, PROCEEDINGS. IEEE COMP SOC, TECH COMM MATH FDN COMP, 1994: 124-134.
- [6] GROVER L. Quantum mechanics helps in searching for a needle in a haystack[J]. PHYSICAL REVIEW LETTERS, 1997, 79(2): 325-328.
- [7] LABORATORY T Q. Tencentircuit:a quantum software framework for the nisq era[EB/OL]. https://quantum.tencent.com/news/2022/0526_1215.
- [8] GONG M, WANG S, ZHA C, et al. Quantum walks on a programmable two-dimensional 62-qubit superconducting processor[J]. SCIENCE, 2021, 372(6545): 948+.
- [9] WU Y, BAO W S, CAO S, et al. Strong quantum computational advantage using a superconducting quantum processor[J]. PHYSICAL REVIEW LETTERS, 2021, 127(18).
- [10] ZHAO Y, YE Y, HUANG H L, et al. Realization of an error-correcting surface code with superconducting qubits[J]. PHYSICAL REVIEW LETTERS, 2022, 129(3).
- [11] ARUTE F, ARYA K, BABBUSH R, et al. Quantum supremacy using a programmable superconducting processor[J]. NATURE, 2019, 574(7779): 505+.
- [12] PAN F, CHEN K, ZHANG P. Solving the sampling problem of the sycamore quantum circuits [J]. Phys. Rev. Lett., 2022, 129: 090502.
- [13] ZHONG H S, WANG H, DENG Y H, et al. Quantum computational advantage using photons [J]. SCIENCE, 2020, 370(6523): 1460-1463.

- [14] ZHONG H S, DENG Y H, QIN J, et al. Phase-programmable gaussian boson sampling using stimulated squeezed light[J]. *Phys. Rev. Lett.*, 2021, 127: 180502.
- [15] PRESKILL J. Quantum computing in the nisq era and beyond[M]. *Quantum* 2,79, 2018.
- [16] YAN Z, ZHANG Y R, GONG M, et al. Strongly correlated quantum walks with a 12-qubit superconducting processor[J]. *SCIENCE*, 2019, 364(6442): 753+.
- [17] YE Y, GE Z Y, WU Y, et al. Propagation and localization of collective excitations on a 24-qubit superconducting processor[J]. *PHYSICAL REVIEW LETTERS*, 2019, 123(5).
- [18] CAO Y, ROMERO J, OLSON J P, et al. Quantum chemistry in the age of quantum computing [J]. *Chemical Reviews*, 2019, 119(19): 10856-10915.
- [19] ZHONGCHU N, SAI L, XIAOWEI D, et al. Beating the break-even point with a discrete-variable-encoded logical qubit[J]. *Nature*, 2023, 61(6): 56–60.
- [20] JOSEPHSON B. Possible new effects in superconductive tunnelling[J]. *PHYSICS LETTERS*, 1962, 1(7): 251-253.
- [21] ANDERSON P W, ROWELL J M. Probable observation of the josephson superconducting tunneling effect[J]. *Phys. Rev. Lett.*, 1963, 10: 230-232.
- [22] BOUCHIAT V, VION D, JOYEZ P, et al. Quantum coherence with a single cooper pair[J]. *PHYSICA SCRIPTA*, 1998, T76: 165-170.
- [23] NAKAMURA Y, PASHKIN Y, TSAI J. Coherent control of macroscopic quantum states in a single-cooper-pair box[J]. *NATURE*, 1999, 398(6730): 786-788.
- [24] KOCH J, YU T M, GAMBETTA J, et al. Charge-insensitive qubit design derived from the cooper pair box[J]. *PHYSICAL REVIEW A*, 2007, 76(4).
- [25] BARENDS R, KELLY J, MEGRANT A, et al. Coherent josephson qubit suitable for scalable quantum integrated circuits[J]. *PHYSICAL REVIEW LETTERS*, 2013, 111(8).
- [26] YAN Z. Multi-qubit quantum random walk and scalable quantum qubit control[D]. University of Science and Technology of China, 2019.
- [27] BERNSTEIN J, GERLACH J W, FINZEL A, et al. Ion beam sputter deposition of sio₂ thin films using oxygen ions[J]. *EUROPEAN PHYSICAL JOURNAL B*, 2022, 95(3).
- [28] ZHA C. Research on ergodic phase and localized phase in many-body quantum simulation and two-dimensional quantum walk[D]. University of Science and Technology of China, 2022.

附录 A 附 录

A.1 一维量子谐振子的能级和势能图片源码

一维量子谐振电路与一维量子谐振子类似。而后者地能级和波函数是量子力学中较为基础的内容，使用代数法可以较轻松地得到其定态波函数为

$$\psi_n(x) = \left(\frac{C\omega_0}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} H_n(\xi) e^{-\xi^2/2} \quad (\text{A.1})$$

式中， $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ ， $\xi = \frac{C\omega}{\hbar}x$ ， H_n 为厄密多项式，图中用到的前五个为

$$\begin{aligned} H_0 &= 1 \\ H_1 &= 2\xi \\ H_2 &= 4\xi^2 - 2 \\ H_3 &= 8\xi^3 - 12\xi \\ H_4 &= 16\xi^4 - 48\xi^2 + 12 \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

实际代码中取自然单位制，即 $\hbar = 1$ ，并取 $L = C = 1$ 。绘出图像为图 2.3。

```

1 #include <math.h>
2 #include "potential.hpp"
3 double PotentialEnergy(double *x, double *par) // 归一化势能函数
4 {
5     double f1=0.125*x[0]*x[0];
6     return f1;
7 }
8 double EnergyLevel(double *x, double *par) // 能级虚线
9 {
10    double f=0.5+1*par[0];
11    return f;
12 }
13 double Psi_4(double *x, double *par) // n=4时波函数
14 {
15    double xi=x[0]/2;
16    double psi=pow(TMATH::Pi(), -0.25)*(16*pow(xi, 4)-48*pow(xi, 2)+12)*TMATH::
17        Exp(-xi*xi/2.0)/sqrt(pow(2, 4)*24);
18    return psi*psi+4.5;
19 }
20 double Psi_3(double *x, double *par) // n=3时波函数
21 {
22    double xi=x[0]/2;
23    double psi=pow(TMATH::Pi(), -0.25)*(8*pow(xi, 3)-12*xi)*TMATH::Exp(-xi*xi
24        /2.0)/sqrt(pow(2, 3)*6);
25    return psi*psi+3.5;
26 }
27 double Psi_2(double *x, double *par) // n=2时波函数
28 {
29    double xi=x[0]/2;
30    double psi=pow(TMATH::Pi(), -0.25)*(4*pow(xi, 2)-2)*TMATH::Exp(-xi*xi/2.0)
31        /sqrt(pow(2, 2)*2);
32    return psi*psi+2.5;

```

```

30 }
31 double Psi_1(double *x,double *par)//n=1时波函数
32 {
33     double xi=x[0]/2;
34     double psi=pow(TMATH::Pi(),-0.25)*(2*xi)*TMATH::Exp(-xi*xi/2.0)/sqrt(2);
35     return psi*psi+1.5;
36 }
37 double Psi_0(double *x,double *par)//n=0时波函数
38 {
39     double xi=x[0]/2;
40     double psi=pow(TMATH::Pi(),-0.25)*TMATH::Exp(-xi*xi/2.0);
41     return psi*psi+0.5;
42 }
43 void potential()//主函数
44 {
45     Color_t color[5]={kBlack,kOrange,kGreen,kYellow,kBlue};
46     int i=0;
47     TF1 *f=new TF1("",PotentialEnergy,-5*TMATH::Pi(),5*TMATH::Pi(),0);
48     f->GetYaxis()->SetTitle("potential energy");
49     f->GetXaxis()->SetTitle("phase");
50     f->GetYaxis()->SetRangeUser(0,6);
51     f->SetLineColor(kRed);
52     f->Draw();//绘制势能曲线
53     for (i=0;i<5;i++)
54     {
55         TF1 *e1=new TF1("energy",EnergyLevel,-5*TMATH::Pi(),5*TMATH::Pi(),1)
56         ;
57         e1->SetLineStyle(2);
58         e1->SetParameter(0,i);
59         e1->SetLineColor(color[i]);
60         e1->Draw("same");//绘制能级虚线
61     }
62     for (i=0;i<4;i++)
63     {
64         TArrow *arrow = new TArrow(0.0,0.55+i,0.0,1.45+i,0.02,"<>");
65         arrow->Draw();
66     }
67     TF1 *psi4=new TF1("",Psi_4,-5*TMATH::Pi(),5*TMATH::Pi(),0);
68     psi4->SetLineColor(kBlue);
69     psi4->Draw("same");//绘制n=4时波函数
70     TF1 *psi3=new TF1("",Psi_3,-5*TMATH::Pi(),5*TMATH::Pi(),0);
71     psi3->SetLineColor(kYellow);
72     psi3->Draw("same");//绘制n=3时波函数
73     TF1 *psi2=new TF1("",Psi_2,-5*TMATH::Pi(),5*TMATH::Pi(),0);
74     psi2->SetLineColor(kGreen);
75     psi2->Draw("same");//绘制n=2时波函数
76     TF1 *psi1=new TF1("",Psi_1,-5*TMATH::Pi(),5*TMATH::Pi(),0);
77     psi1->SetLineColor(kOrange);
78     psi1->Draw("same");//绘制n=1时波函数
79     TF1 *psi0=new TF1("",Psi_0,-5*TMATH::Pi(),5*TMATH::Pi(),0);
80     psi0->SetLineColor(kBlack);
81     psi0->Draw("same");//绘制n=0时波函数
82     TLegend *legend=new TLegend(0.7,0.7,0.9,0.9,"");
83     legend->AddEntry(f,"potential");
84     legend->AddEntry(psi0,"state n=0");
85     legend->AddEntry(psi1,"state n=1");
86     legend->AddEntry(psi2,"state n=2");
87     legend->AddEntry(psi3,"state n=3");
88     legend->AddEntry(psi4,"state n=4");
89     legend->Draw("same");//绘制图例

```

A.2 CPB 的能级和势能图片源码

引入约瑟夫森结替代线性电感后，量子电路的哈密顿量发生改变，由 2.61 有

$$H = 4E_c n^2 - E_J \cos(\phi) \quad (\text{A.3})$$

使用解本征方程的形式求解能级，由于对易关系 $[n, \phi] = i$ ，因此有 $n = -i \frac{d}{d\phi}$ ，作用在 n 的本征态上得到 $n|n\rangle = -i \frac{d}{d\phi}|n\rangle \rightarrow |n\rangle = e^{in\phi}$ 。哈密顿量的势能项也修改为 $\cos(\phi) = \frac{1}{2}(e^{i\phi} + e^{-i\phi}) = \frac{1}{2}(|n+1\rangle\langle n| + |n\rangle\langle n+1|)$ ，这样我们就得到粒子数表象下的哈密顿量为

$$H = \sum_n 4E_c n^2 |n\rangle\langle n| - \frac{E_J}{2} (|n+1\rangle\langle n| + |n\rangle\langle n+1|) \quad (\text{A.4})$$

在本征基下可以表示为如下矩阵

$$H = \begin{bmatrix} 4E_c \cdot 0^2 & -\frac{E_J}{2} & & & & \\ -\frac{E_J}{2} & 4E_c \cdot 1^2 & -\frac{E_J}{2} & & & \\ & -\frac{E_J}{2} & 4E_c \cdot 2^2 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & -\frac{E_J}{2} & \\ & & & -\frac{E_J}{2} & 4E_c \cdot n^2 & \end{bmatrix}$$

以 $n = 10$ 作截断，将矩阵带入 mathematica 求特征值数值解，得到的能级在 ROOT-CERN 中绘制为图 3.5。

实际代码中取自然单位制，即 $\hbar = 1$ ，并取 $E_J = 1$ ， $\lambda = \frac{E_C}{E_J} = \frac{1}{50}$ 。

```

1 #include "potential.hpp"
2 #include <math.h>
3 double PotentialEnergy(double *x, double *par) // 归一化势能函数
4 {
5     double f1 = -TMath::Cos(x[0]);
6     return f1;
7 }
8 double EnergyLevel(double *x, double *par) // 能级虚线
9 {
10    return par[0];
11 }
12 void potential() // 主函数
13 {
14    char str[5][10] = {"state n=0", "state n=1", "state n=2", "state n=3", "state
15                       n=4"};
16    Color_t color[5] = {kBlue, kYellow, kGreen, kOrange, kBlack};
17    int i=0;
18    double para[5] = {-0.79011, -0.460522, -0.13914, 0.166215, 0.452111}; // 数据来
19    自 Mathematica 计算结果
20    TF1 *f = new TF1("", PotentialEnergy, -TMath::Pi(), TMath::Pi(), 0);
21    f->GetYaxis()->SetTitle("potential energy");
22    f->GetXaxis()->SetTitle("phase");
23    f->GetYaxis()->SetRangeUser(-1, 1);
24    f->Draw(); // 绘制势能曲线
25    TLegend *legend = new TLegend(.7, .7, .9, .9, "");

```

```

24 legend->AddEntry(f,"potential");
25 for(i=0;i<5;i++)
26 {
27     TF1 *e=new TF1("",EnergyLevel,-TMath::Pi(),TMath::Pi(),1);
28     e->SetParameter(0,para[i]);
29     e->SetLineColor(color[4-i]);
30     e->SetLineStyle(2);
31     legend->AddEntry(e,str[i]);
32     e->Draw("same");//绘制能级虚线
33 }
34 legend->Draw("same");//绘制图例
35 double arrow1=0,arrow2=0;
36 for(i=0;i<4;i++)
37 {
38     TArrow *arrow = new TArrow(0.0,para[i]+0.01,0.0,para[i+1]-0.01,0.02,
39         "<>");
40     arrow->Draw();
41 }

```

A.3 Transmon 的电荷噪声抑制图片源码

```

1 syms ec ng;
2 m = [ec*(0-ng)^2, -0.5,0,0,0,0,0,0,0,0;
3     -0.5,ec*(1-ng)^2, -0.5,0,0,0,0,0,0,0;
4     0, -0.5,ec*(2-ng)^2, -0.5,0,0,0,0,0,0;
5     0,0, -0.5,ec*(3-ng)^2, -0.5,0,0,0,0,0;
6     0,0,0, -0.5,ec*(4-ng)^2, -0.5,0,0,0,0;
7     0,0,0,0, -0.5,ec*(5-ng)^2, -0.5,0,0,0;
8     0,0,0,0,0, -0.5,(6-ng)^2*ec, -0.5,0,0;
9     0,0,0,0,0,0, -0.5,(7-ng)^2*ec, -0.5,0;
10    0,0,0,0,0,0,0, -0.5,(8-ng)^2*ec, -0.5;
11    0,0,0,0,0,0,0,0, -0.5,(9-ng)^2*ec];
12 m1=subs(m,'ec',2);
13 for i=1:400
14 m2=subs(m1,'ng',-2+0.01*i);
15 a=eig(m2);
16 a1=sort(a);
17 plot(-2+0.01*i,a1(1),'.','MarkerSize',1,'Color','r')
18 hold on
19 plot(-2+0.01*i,a1(2),'.','MarkerSize',1,'Color','g')
20 hold on
21 plot(-2+0.01*i,a1(3),'.','MarkerSize',1,'Color','b')
22 hold on
23 end
24 clear
25
26 syms ec ng;
27 m = [ec*(0-ng)^2, -0.5,0,0,0,0,0,0,0,0;
28     -0.5,ec*(1-ng)^2, -0.5,0,0,0,0,0,0,0;
29     0, -0.5,ec*(2-ng)^2, -0.5,0,0,0,0,0,0;
30     0,0, -0.5,ec*(3-ng)^2, -0.5,0,0,0,0,0;
31     0,0,0, -0.5,ec*(4-ng)^2, -0.5,0,0,0,0;
32     0,0,0,0, -0.5,ec*(5-ng)^2, -0.5,0,0,0;
33     0,0,0,0,0, -0.5,(6-ng)^2*ec, -0.5,0,0;
34     0,0,0,0,0,0, -0.5,(7-ng)^2*ec, -0.5,0;
35     0,0,0,0,0,0,0, -0.5,(8-ng)^2*ec, -0.5;
36     0,0,0,0,0,0,0,0, -0.5,(9-ng)^2*ec];
37 m1=subs(m,'ec',0.2);
38 for i=1:400
39 m2=subs(m1,'ng',-2+0.01*i);

```



```

40 a=eig(m2);
41 a1=sort(a);
42 plot(-2+0.01*i,a1(1),'.','MarkerSize',1,'Color','r')
43 hold on
44 plot(-2+0.01*i,a1(2),'.','MarkerSize',1,'Color','g')
45 hold on
46 plot(-2+0.01*i,a1(3),'.','MarkerSize',1,'Color','b')
47 hold on
48 end
49 clear
50
51 syms ec ng;
52 m = [ec*(0-ng)^2,-0.5,0,0,0,0,0,0,0,0;
53 -0.5,ec*(1-ng)^2,-0.5,0,0,0,0,0,0,0;
54 0,-0.5,ec*(2-ng)^2,-0.5,0,0,0,0,0,0;
55 0,0,-0.5,ec*(3-ng)^2,-0.5,0,0,0,0,0;
56 0,0,0,-0.5,ec*(4-ng)^2,-0.5,0,0,0,0;
57 0,0,0,0,-0.5,ec*(5-ng)^2,-0.5,0,0,0;
58 0,0,0,0,0,-0.5,(6-ng)^2*ec,-0.5,0,0;
59 0,0,0,0,0,0,-0.5,(7-ng)^2*ec,-0.5,0;
60 0,0,0,0,0,0,0,-0.5,(8-ng)^2*ec,-0.5;
61 0,0,0,0,0,0,0,0,-0.5,(9-ng)^2*ec];
62 m1=subs(m,'ec',0.02);
63 for i=1:400
64 m2=subs(m1,'ng',-2+0.01*i);
65 a=eig(m2);
66 a1=sort(a);
67 plot(-2+0.01*i,a1(1),'.','MarkerSize',1,'Color','r')
68 hold on
69 plot(-2+0.01*i,a1(2),'.','MarkerSize',1,'Color','g')
70 hold on
71 plot(-2+0.01*i,a1(3),'.','MarkerSize',1,'Color','b')
72 hold on
73 end
74 clear
75
76 syms ec ng;
77 m = [ec*(0-ng)^2,-0.5,0,0,0,0,0,0,0,0;
78 -0.5,ec*(1-ng)^2,-0.5,0,0,0,0,0,0,0;
79 0,-0.5,ec*(2-ng)^2,-0.5,0,0,0,0,0,0;
80 0,0,-0.5,ec*(3-ng)^2,-0.5,0,0,0,0,0;
81 0,0,0,-0.5,ec*(4-ng)^2,-0.5,0,0,0,0;
82 0,0,0,0,-0.5,ec*(5-ng)^2,-0.5,0,0,0;
83 0,0,0,0,0,-0.5,(6-ng)^2*ec,-0.5,0,0;
84 0,0,0,0,0,0,-0.5,(7-ng)^2*ec,-0.5,0;
85 0,0,0,0,0,0,0,-0.5,(8-ng)^2*ec,-0.5;
86 0,0,0,0,0,0,0,0,-0.5,(9-ng)^2*ec];
87 m1=subs(m,'ec',0.002);
88 for i=1:400
89 m2=subs(m1,'ng',-2+0.01*i);
90 a=eig(m2);
91 a1=sort(a);
92 plot(-2+0.01*i,a1(1),'.','MarkerSize',1,'Color','r')
93 hold on
94 plot(-2+0.01*i,a1(2),'.','MarkerSize',1,'Color','g')
95 hold on
96 plot(-2+0.01*i,a1(3),'.','MarkerSize',1,'Color','b')
97 hold on
98 end
99 clear

```

致 谢

感谢陈向军教授对原子物理课程的精彩讲授。

感谢微尺度物质科学国家研究中心霍永恒教授和上海研究院钟东勋副研究员的指导，感谢中国科学技术大学微纳研究与制造中心的实验培训。

感谢核探测与核电子学国家重点实验室唐泽波教授的指导。

感谢物理学院 2021 级刘元彻同学对本文科研绘图的建议，以及化学与材料科学学院 2021 级程才圣同学对本文有关化学动力学量子模拟部分的建议。

本文中的电路模型图均使用 `mathcha.io` 平台绘制；势能、能级和波函数图使用 `Mathematica` 计算数据，`ROOT-CERN` 软件绘制；`Transmon` 量子比特噪声分析部分使用 `Matlab` 计算数据并绘制，在此感谢开发和维护人员。